

CALCULAR EL RADIO DE LA TIERRA: EMULANDO A ERATÓSTENES

CALCULATING THE EARTH'S RADIUS: EMULATING ERATOSTENES
CALCULE O RAIO DA TERRA: EMULANDO ERATOSTENES

Jorge Enrique Díaz-Pinzón ¹ 

1. Magister en Gestión de la Tecnología Educativa, Docente de Matemáticas. Secretaría de Educación de Soacha, Cundinamarca, Colombia. jediazp@unal.edu.co

*Autor de correspondencia: Jorge Enrique Díaz-Pinzón, email: jediazp@unal.edu.co

Información del artículo:

Artículo original

DOI: <https://doi.org/10.33975/riuq.vol35n1.863>

Recibido: 1 septiembre 2022; Aceptado: 15 marzo 2023

RESUMEN

Hace 2.255 años, el genial matemático, astrónomo y geógrafo griego Eratóstenes de Cirene, con palos, sombras, matemática, astronomía, e imaginación, calculó el radio de la Tierra. Por tal motivo varias ciudades del mundo, Bogotá (Colombia), Buenos Aires (Argentina), Nápoles (Italia), Úbeda (España), y Sao Paulo (Brasil), participaron del proyecto de medir el radio de la Tierra según el método de Eratóstenes en la antigüedad. Cada ciudad participante tenía que tomar unos datos de ubicación y del ángulo de la sombra que proyecta un palo vertical entre el 22 de septiembre al 4 de octubre de 2021. Una vez recolectado estos datos, se procedió a calcular la distancia media del radio de la Tierra. Los resultados obtenidos fueron: 6.205 km para Bogotá, 6.365,983 km para Buenos Aires, 6.392,121 km para Úbeda, 6.590,238 km para Nápoles y 6596,579 km para Sao Paulo. Podemos inferir del resultado de la experiencia, que ésta permitió que las ciudades participantes tuvieran una estrecha colaboración, a una prueba científica que les colocaba en contacto, a través de la Astronomía.

Palabras clave: Astronomía; Radio de la Tierra; Gnomon; Mediodía; Angulo solar.

Cómo citar: Díaz-Pinzón, Jorge Enrique. (2023). Calcular el radio de la tierra: emulando a eratóstenes. *Revista de Investigaciones Universidad del Quindío*, 35(1), 102-111. <https://doi.org/10.33975/riuq.vol35n1.863>

ISSN: 1794-631X e-ISSN: 2500-5782

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons
Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional.



ABSTRACT

2,255 years ago, the great Greek mathematician, astronomer, and geographer Eratosthenes of Cyrene, with sticks, shadows, mathematics, astronomy, and imagination, calculated the radius of the Earth. For this reason, several cities in the world, Bogotá (Colombia), Buenos Aires (Argentina), Naples (Italy), Úbeda (Spain), and Sao Paulo (Brazil), participated in the project to measure the radius of the Earth according to the method of Eratosthenes in ancient times. Each participating city had to take data on the location and the angle of the shadow cast by a vertical pole between September 22 and October 4, 2021. Once these data had been collected, the mean distance of the radius of the Land. The results obtained were: 6,205 km for Bogotá, 6,365,983 km for Buenos Aires, 6,392,121 km for Úbeda, 6,590,238 km for Naples and 6,596,579 km for Sao Paulo. We can infer from the result of the experience, that it allowed the participating cities to have a close collaboration, to a scientific test that put them in contact, through Astronomy

Keywords: Astronomy; Earth's Radius; Gnomon; Noon; solar angle.

RESUMO

2.255 anos atrás, o grande matemático grego, astrônomo e geógrafo Erastóstenes de Cirene, com paus, sombras, matemática, astronomia e imaginação, calculou o raio da Terra. Por isso, várias cidades do mundo, Bogotá (Colômbia), Buenos Aires (Argentina), Nápoles (Itália), Úbeda (Espanha) e São Paulo (Brasil), participaram do projeto para medir o raio da Terra segundo ao método de Erastóstenes nos tempos antigos. Cada cidade participante teve que coletar dados sobre a localização e o ângulo da sombra projetada por um polo vertical entre 22 de setembro e 4 de outubro de 2021. Uma vez que esses dados foram coletados, a distância média do raio da Terra. Os resultados obtidos foram: 6.205 km para Bogotá, 6.365.983 km para Buenos Aires, 6.392.121 km para Úbeda, 6.590.238 km para Nápoles e 6.596.579 km para São Paulo. Podemos inferir do resultado da experiência, que permitiu às cidades participantes uma estreita colaboração, para uma prova científica que as colocou em contacto, através da Astronomia.

Palavras-chave: Astronomia; Raio da Terra; Gnomon; Meio-dia. Ângulo solar.

INTRODUCCIÓN

El griego Eratóstenes existió en Alejandría entre los años 276 A.C. y 194 A.C. Era un distinguido matemático, astrónomo y geógrafo de la época. Entre otros trabajos uno de los más ilustres y estudiados en la actualidad es la llamada “Criba de Eratóstenes” para el cálculo de números primos. (Vera, 2015), (GCF GLOBAL,2021), (MIMOSA,2021).

El estudio del matemático griego que en este tema nos concierne es del cálculo de las dimensiones terrestres mediante un experimento sencillo que podremos hacerlo en la institución educativa de forma muy práctica como veremos más adelante. (Vera, 2015). Representemos el experimento realizado por Eratóstenes: se sabía que en Siena (hoy Asuán en Egipto) los días próximos al solsticio de verano el sol al mediodía no trazaba sombras, es decir estaba en la perpendicular con la horizontal terrestre. En contraste, el mismo día a la misma hora en Alejandría esto no sucedía y los palos tenían sombra (figuras 1). Mediante este análisis Eratóstenes no sólo le costó para darse cuenta de que la tierra no era plana sino para ¡calcular el radio de la tierra! Observemos gráficamente el ensayo a fin de comprenderlo mejor:

Si la tierra es esférica:

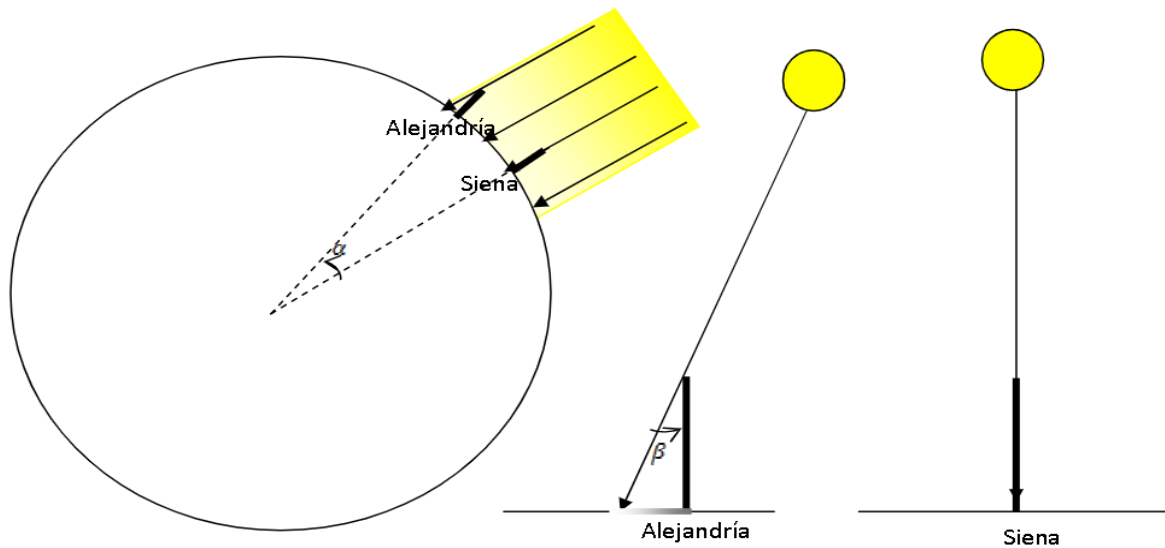


Figura 1. Rayos de sol sobre Alejandría y Siena.
Fuente: Vera, 2015

En la figura 2 podemos apreciar si la tierra fuera plana:

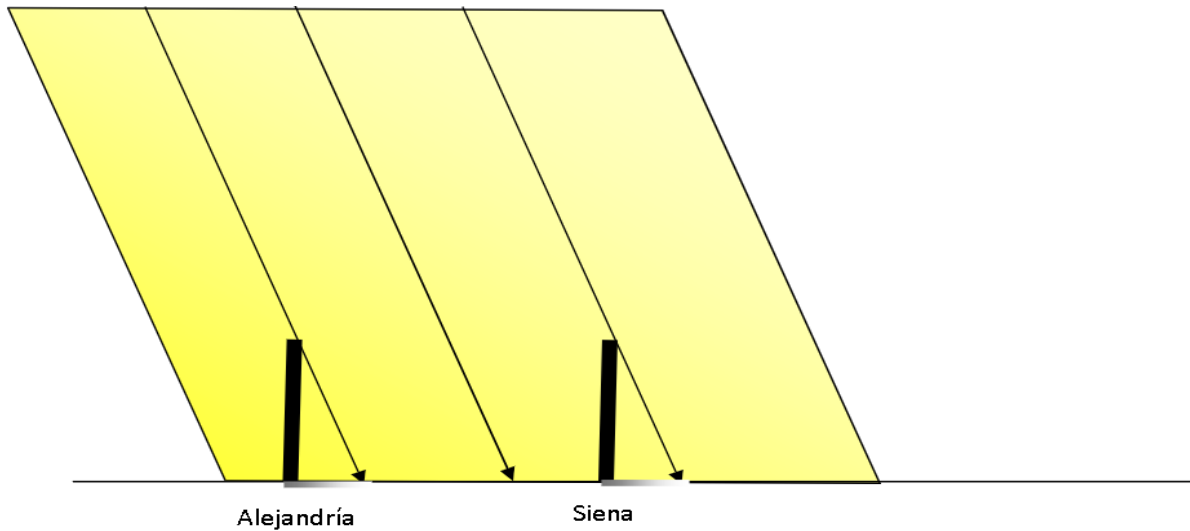


Figura 2. Rayos de sol sobre Alejandría y Siena, si la tierra fuera plana.
Fuente: (Vera, 2015)

Ahora, Siena está simbolizada por el punto S y Alejandría por el punto A, ambos puntos sobre la superficie de la Tierra a la que se ve como un círculo. En la figura 3, la longitud de arco entre S y A es d , y el ángulo equivalente a este arco es q . El radio de la Tierra es R . Presumamos que los rayos del sol aparecen en forma paralela a la Tierra. La Figura 3 concierne al momento en que el sol está justo sobre la ciudad de Siena. En entes momento, los rayos inciden perpendicularmente a la superficie de la Tierra en la ciudad de Siena, y luego tienen la misma dirección que el radio de la Tierra que une esta ciudad con el centro de la esfera terrestre.

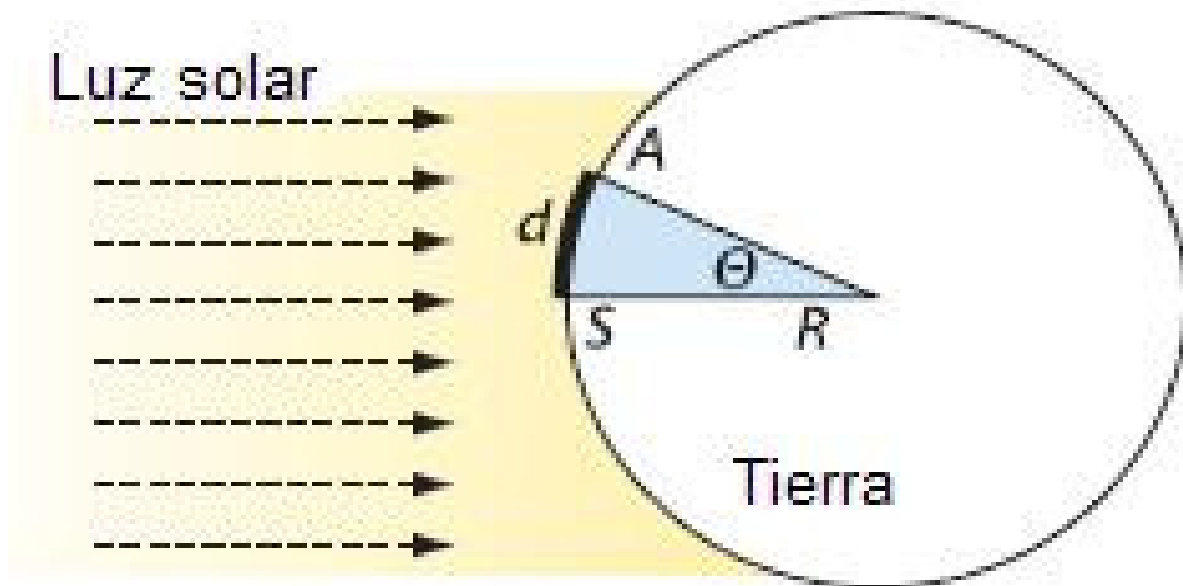


Figura 3. Rayos de sol sobre Alejandría y Siena.
Fuente: (Universidad de Buenos Aires, 2012)

El sol está exactamente sobre la ciudad de Siena (indicada con una S sobre la superficie de la Tierra). La ciudad de Alejandría está señalada con la letra A. Cuando el sol se hallaba exactamente sobre la ciudad de Siena, Eratóstenes midió la sombra de una torre en Alejandría, como se observa en la figura 4. Es decir, midió dicha sombra al mediodía del 21 de junio. La torre es perpendicular a la superficie de la Tierra en el punto A, y por lo tanto tiene la dirección del radio que une al centro terrestre con el punto A. Dado que todos los rayos del sol son paralelos entre sí, se infiere de la figura 4 que el ángulo que crean los rayos con la torre es θ , por ser alterno interno con el que subtende el arco que une a A con S. (Universidad de Buenos Aires, 2012)

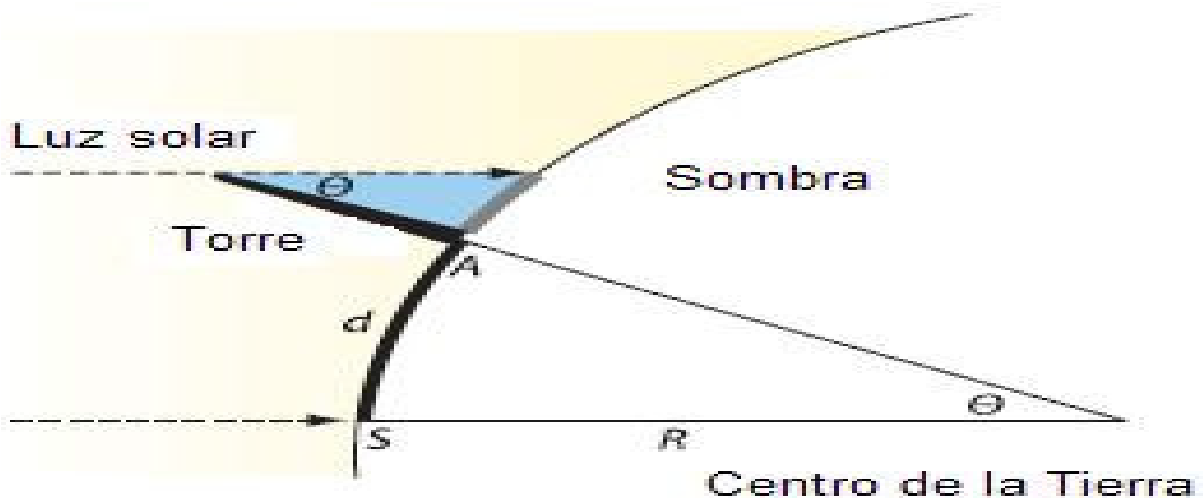


Figura 4. La geometría del experimento de Eratóstenes.
Fuente: (Universidad de Buenos Aires, 2012)

Si nos precisamos bien en la figura 1 (donde la tierra es esférica) se apreció que los ángulos que marcan la diferencia de latitud entre las dos ciudades (α) y el ángulo de los rayos solares con el palo

en Alejandría (β) son semejantes, pues los lados que constituyen ambos ángulos son paralelos. En la figura 5 se observa el cálculo del ángulo que forma el palo de Alejandría con los rayos solares (con arco tangente del cociente del tamaño de la sombra y del palo) se habrá calculado la diferencia de latitud. Así lo perpetró Eratóstenes y calculó este ángulo cuyo resultado fue 1/50 parte de la circunferencia completa, que mide 360° ($360 \div 7,2$) = 50. (Vera, 2015), (GCF GLOBAL,2021), (MIMOSA,2021), (Martín,2018)

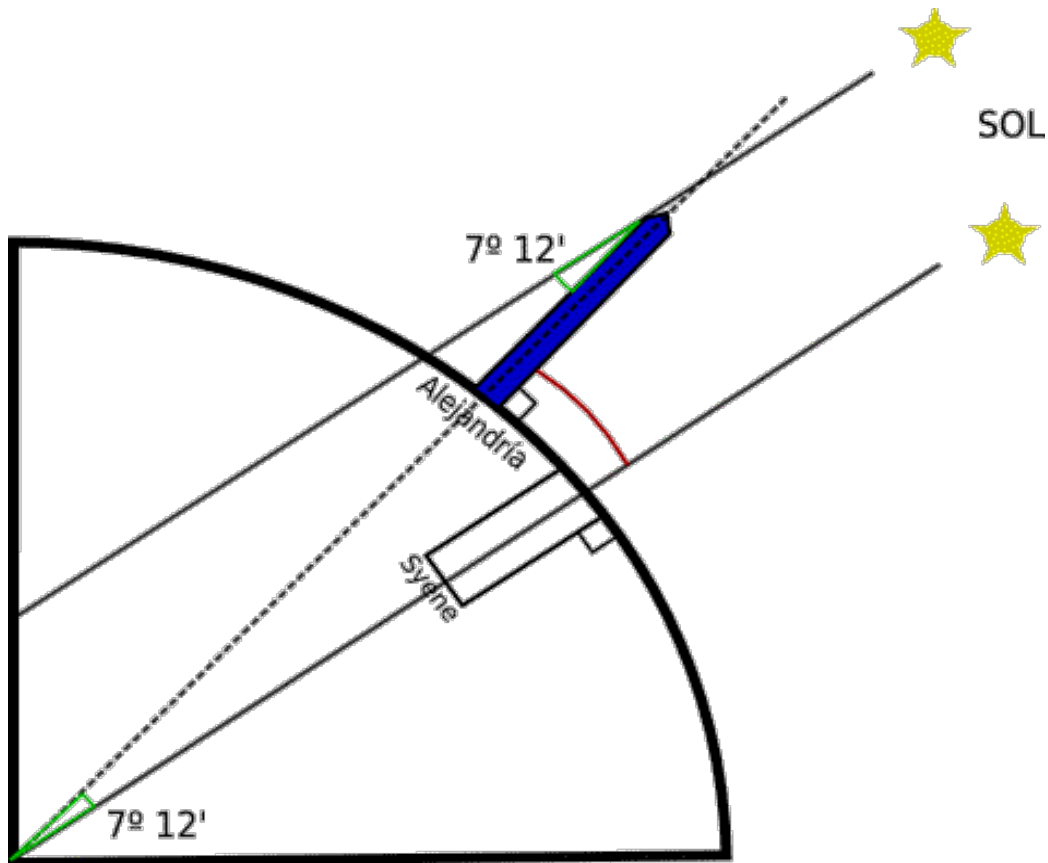


Figura 5. Ángulo de Alejandría y Siena con el centro de la tierra.
Fuente: (MIMOSA, 2021)

Ahora, cuando una persona está parada en un lugar llano sobre la superficie de la Tierra es complicado percibir su curvatura. Da la sensación de que, más allá de las rugosidades del terreno, la persona se encuentra sobre una superficie plana. En cada lugar sobre la superficie de la Tierra, esa superficie plana sobre la que nos da la impresión de que caminamos o sobre la que se trazan las sombras de los diferentes objetos, es perpendicular a la vertical en el lugar de la Tierra donde uno se ubica. Consecuentemente, la sombra de un objeto delgado en posición vertical (como la torre que midió Eratóstenes que se muestra en la figura 4, y el objeto constituyen un ángulo recto entre sí. (López, 2007)

El objetivo de la investigación es medir el radio de la tierra según el método de Eratóstenes,

para nuestra indagación, cada cálculo del radio terrestre demanda, al menos, dos ciudades que midan sombras y longitudes de gnómones, cada una en su punto geográfico durante el mediodía solar, cerca

de los equinoccios, o eventualmente de días diferentes, cerca de los solsticios.

METODOLOGÍA

Esta investigación se realizó bajo un estudio transversal (Díaz, 2020a, 2020b, 2020c). Posteriormente, se procedió inicialmente a la toma de medidas y cálculo del radio se eligió para tal fin las fechas comprendidas entre el 22 de septiembre al 4 de octubre de 2021 con un día soleado en las ciudades de Bogotá, Colombia, Buenos Aires, Argentina, Úbeda, España, Nápoles, Italia, y Sao Paulo, Brasil. Nuestro objetivo es calcular el ángulo solar (en la figura 6 se aprecia el ángulo que forma el sol con un gnomon o palo perpendicular al suelo). Para determinar al mediodía solar, se utilizó una calculadora solar NOAA (Laboratorio de Monitoreo Global, 2021).

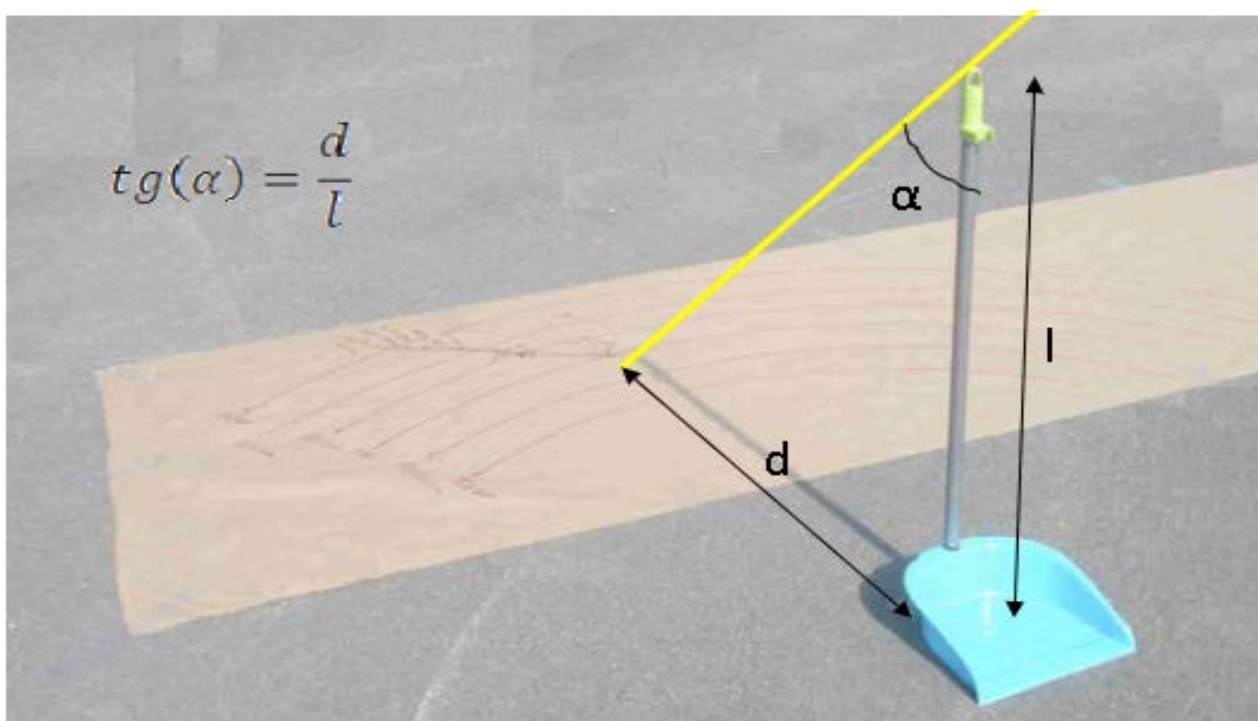


Figura 6. Ángulo que forma el sol con un gnomon o palo perpendicular al suelo.

Fuente: Vera, 2015

En la tabla 1 podemos apreciar las cinco ciudades que participaron en la investigación y sus respectivas latitudes y longitudes.

Tabla 1. Latitud y Longitud de las ciudades participantes

CIUDAD, PAÍS	LATITUD	LONGITUD
Bogotá, Colombia	4,671 N	-74,092O
Buenos Aires, Argentina	-31,79 S	-58,30
Úbeda, España	38,017 N	3,36W
Nápoles, Italia	40,91N	14,38E
Sao Paulo, Brasil	-22,587S	-49,511O

Fuente: el autor

RESULTADOS

En la tabla 2 se observan las medidas de los gnomones, las sombras, los ángulos solares y las distancias al Ecuador, de las diferentes ciudades participantes en la medición del radio de la tierra.

Para calcular el ángulo solar se divide la medida del gnomon entre la medida de la sombra, y para determinar la distancia al Ecuador, se determinó agregándole al ángulo ya medido anteriormente nuestra distancia a la línea ecuatorial, que podremos calcular aquí: <http://www.eratosthenes.eu/spip/spip.php?article26&lang=en#distance> donde la primera latitud es el ángulo solar en la línea ecuatorial, que el día del equinoccio es cero, y la segunda latitud es la nuestra, es decir el ángulo solar medido.

Tabla 2. Medidas de la vara, sombra, ángulo solar y distancia al Ecuador.

CIUDAD, PAÍS	MEDIDA DEL GNOMON (CM)	MEDIDA DE LA SOMBRA (CM)	ÁNGULO SOLAR	DISTANCIA AL ECUADOR (KM)
Bogotá, Colombia	83,5	7	4.792°	519
Buenos Aires, Argentina	40	25	32.005°	3556
Úbeda, España	30,8	24	37.926°	4231,37
Nápoles, Italia	100	82,5	39.523°	4546
Sao Paulo, Brasil	100	40	21.801°	2510

Fuente: el autor

Calcular el radio de la tierra, a través de la sombra que se proyecta al medio día.

Formulas:

$\text{tg}(\theta_A) = \text{largo de la sombra} / \text{largo del gnomon}$

D= distancia al Ecuador

Ahora, calculamos la longitud del arco: se divide la distancia D con el ángulo solar en grados (AS) de la tabla 2.

D/AS

A continuación, el resultado se multiplica por 360°, así tenemos el perímetro.

$P = 360^\circ * (D/AS)$

Y finalmente, el radio se encuentra así:

$R = P/(2\pi)$

En la tabla 3 se aprecian los valores para el radio y error de la medición en cada una de las ciudades. Debemos tener en cuenta que el radio promedio de la tierra es de 6.371 kilómetros.

El error en porcentaje se calcula de la siguiente manera:

$$E(\%) = \frac{RT - RC}{RT} \times 100$$

Donde:

RT= Radio de la Tierra (6.371 kms)

RC= Radio calculado por ciudad

En la tabla 3 se aprecian los cálculos de los radios para las cinco ciudades estudiadas y sus respectivos porcentajes de error.

Tabla 3. Radios y errores

CIUDAD, PAÍS	RADIO (KM)	ERROR (%)
Bogotá, Colombia	6.205	2,6
Buenos Aires, Argentina	6.365,983	0,078
Úbeda, España	6.392,121	0,33
Nápoles, Italia	6.590,238	3,44
Sao Paulo, Brasil	6596,579	3,5

Fuente: el autor

Ahora, con los resultados obtenidos también se puede calcular el radio de la tierra, restando los ángulos solares y las distancias de cada ciudad al Ecuador. Vamos a utilizar como referente, las medidas de las ciudades entre Bogotá, Colombia y Buenos Aires Argentina.

Según la información de la tabla 2, hallamos la diferencia de ángulos entre las ciudades:

$$\text{Diferencia de ángulo} = 32.005^\circ - 4.792^\circ = 27,213^\circ$$

$$\text{Diferencia entre las ciudades: } 3556 \text{ km} - 519 \text{ km} = 3.037 \text{ km.}$$

Ahora, dividimos la diferencia entre las ciudades entre la diferencia de ángulo:

$$3.037 \div 27,213^\circ = 111,6010$$

A continuación, calculamos el perímetro de la tierra:

$$\text{Perímetro} = 360 * 111,6010 = 40176,38 \text{ kms}$$

Posteriormente, determinamos el radio de la tierra:

$$R = \text{Perímetro} \div 2\pi$$

$$R = 40176,38 \text{ kms} \div 6,2832$$

$$R = 6.394,255 \text{ kms}$$

Y finalmente calculamos el porcentaje de error:

$$E(\%) = \frac{RT - RC}{RT} \times 100$$

$$E(\%) = \frac{6.371 - 6.394,255}{6.371} \times 100$$

$$E(\%) = 0,36$$

CONCLUSIONES

Después de aplicar la metodología expuesta, la medición resultante del radio de la Tierra fue de 6.205 km para Bogotá, Colombia, 6.365,983 km para Buenos Aires, Argentina, 6.392,121 km para Úbeda, España, 6.590,238 km para Nápoles, Italia, y 6596,579 km para Sao Paulo, Brasil. Como es sabido, el radio medio de la Tierra, establecido por los métodos actuales más precisos, es de 6.371 km. La ciudad que tuvo el menor error en la medición fue Buenos Aires, Argentina con un 0,078%, seguido de Úbeda, España con un 0,33%, y Bogotá, Colombia con un 2,6 %, el error en la medición comparando Buenos Aires con Bogotá, fue del 0,36%. Podemos deducir que es un resultado satisfactorio, si tenemos en cuenta los aparatos tan sencillos y faltos de precisión con que se hicieron las mediciones.

Si el resultado de estas mediciones es considerado como satisfactorio, imaginemos la medición que hizo Eratóstenes hace 2.200 años con el inconveniente y la lógica imprecisión de fijar la distancia entre Alejandría y Siena, y cuyo error fue de sólo de 40 km (Sagan, 1980); esto es el 0,62%. Una majestuosa y sorprendente hazaña. En todo caso, y más allá de la comparación con Eratóstenes, y del resultado de la experiencia, ésta permitió que las ciudades participantes tuvieran una estrecha colaboración, a una prueba científica que les colocaba en contacto, a través de la Astronomía, con una figura eminente del gran siglo de la ciencia griega, y les demostraba el gran avance de nuestro tiempo, al permitir a unas personas del mundo llevar a cabo una investigación que hace más de 2000 años, solo estaba al alcance de los más ilustres científicos. (Sáez, 2010).

Este tipo de colaboración permitió además propiciar el aprendizaje dinámico, ofrecer nuevos espacios para la enseñanza, la comprobación, el análisis y la construcción del conocimiento. (Díaz, 2016a; 2017b)

Conflicto de interés: El autor declara que no existe ningún conflicto de intereses.

Contribución por autor: El autor es responsable de todos los componentes del presente trabajo.

Financiación o fondos: El presente estudio no conto con ningún apoyo financiero, todo fue con recurso propio del investigador.

REFERENCIAS

- GCF GLOBAL. (2021). ¿Cómo midió Eratóstenes la Tierra? [Internet]. Disponible en : <https://edu.gcfglobal.org/es/aplicaciones-de-la-matematica/como-midio-la-tierra-eratostenes/1/>
- Díaz-Pinzón, J.E. (2016a). Planetario: Estrategia de Aprendizaje. *Revista Fedumar Pedagogía y Educación*. Vol. 3. No. 1.
- Díaz-Pinzón, J.E. (2016b). Clubes de Astronomía: Didáctica de enseñanza de la ciencia y la investigación. *Revista Fedumar Pedagogía y Educación*. Vol. 3. No. 1.
- Díaz Pinzón, J. E. (2020a). Descripción estadística del COVID-19 según el grupo etario en Colombia. *Revista Repertorio De Medicina Y Cirugía*, 79–85. <https://doi.org/10.31260/RepertMedCir.01217372.1098>
- Díaz Pinzón, J. E. (2020b). Continuidad con los procesos pedagógicos de los estudiantes durante la pandemia ocasionada por el COVID-19. *Revista Repertorio De Medicina Y Cirugía*, 108–112. Recuperado a partir de <https://revistas.fucsalud.edu.co/index.php/repertorio/article/view/1128>
- Díaz Pinzón, J. E. (2020c). Positividad y proporción para muestras por COVID-19 en Colombia. *Revista*

- Repertorio De Medicina Y Cirugía*, 127–130. <https://doi.org/10.31260/RepertMedCir.01217372.1134>
Laboratorio de Monitoreo Global laboratorios de investigación del Sistema Terrestre (2021). Calculadora Solar NOAA. [Internet]. Disponible en: <https://gml.noaa.gov/grad/solcalc/>
- López, J. (2007). La medida del radio terrestre por Eratóstenes. [Internet]. Disponible en: <https://digital.csic.es/bitstream/10261/83223/3/eratostenes.pdf>
- Martín, D. Timón, A. (2018). Eratóstenes: Midiendo lo imposible. [Internet]. Disponible en: <https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/matematicas/eratostenes-midiendo-lo-imposible/>
- MIMOSA. (2021). Eratóstenes mide el radio de la Tierra. [Internet]. Disponible en : <http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/practica/eratostenes.htm>
- Sagan, C. (1980). *Cosmos*. Barcelona: Planeta.
- Sáez, F. (2010). Medir el radio de la Tierra. Una experiencia educativa. *Revista de Investigación en Educación*, no 8, 2010, pp. 140-146
- Universidad de Buenos Aires (2012). El Proyecto Eratóstenes. [Internet]. Disponible en : <https://df.uba.ar/es/difusion/proyecto-eratostenes1/informacion-contacto-eratostenes>
- Vera, C. (2015). Cálculo del radio de la Tierra: Método de Eratóstenes (Siglo III a.c.). [Internet]. Disponible en : <https://docplayer.es/3420281-Calculo-del-radio-de-la-tierra-metodo-de-eratostenes-siglo-iii-a-c.html>