

---

# UN ESQUEMA DE MODULACIÓN DE 4 ESTADOS EN 3 DIMENSIONES BASADO EN WAVELETS (4P-3D).

## A MODULATION SCHEME OF 4 STATES IN 3 DIMENSIONS BASED ON WAVELETS (4P-3D).

Jesús Mauricio Ramírez Viáfara<sup>1</sup>, Harold Armando Romo Romero<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Ing. en Electrónica y Telecomunicaciones, MS(c) en Electrónica y Telecomunicaciones, Docente Departamento de Telecomunicaciones – FIET, IEEE Member, Universidad del Cauca Popayán – Colombia, [jesusramirez@unicauca.edu.co](mailto:jesusramirez@unicauca.edu.co)

<sup>2</sup> Ing. en Electrónica y Telecomunicaciones, MS en Electrónica y Telecomunicaciones Docente Departamento de Telecomunicaciones – FIET. IEEE Member. Universidad del Cauca. Popayán - Colombia [hromo@unicauca.edu.co](mailto:hromo@unicauca.edu.co)

---

Recibido: 20 de febrero de 2014

Aceptado: 25 de marzo de 2014

Correspondencia: Correo: [jesusramirez@unicauca.edu.co](mailto:jesusramirez@unicauca.edu.co)  
[hromo@unicauca.edu.co](mailto:hromo@unicauca.edu.co)

### RESUMEN

En este artículo se propone un esquema de modulación digital denominado Modulación Particionada de 4 Estados en 3 Dimensiones (4P-3D). Dicho esquema divide el mensaje binario en bloques de 2 bits y representa cada bloque mediante un vector real de 3 componentes. Los puntos de la constelación coinciden con los vértices de un tetraedro regular centrado en el origen. El conjunto base de la modulación está formado por tres funciones de una familia wavelet ortonormal. Los análisis teóricos y los resultados de las simulaciones confirman que la modulación 4P-3D tiene un mejor desempeño frente al ruido que la modulación por amplitud de pulso binaria (2-PAM) sobre canales con ruido blanco aditivo Gaussiano (AWGN). Además, la conformación de la señal modulada a partir de wavelets hace que los errores de sincronismo en la detección de las muestras tengan un efecto prácticamente despreciable en la probabilidad de error de bit. Un aspecto desfavorable del esquema 4P-3D es la reducción de la eficiencia espectral respecto a la modulación 2-PAM.

**Palabras Clave**— wavelet, familia wavelet ortonormal, eficiencia espectral, ganancia de codificación nominal.

### ABSTRACT

In this article we propose a digital modulation scheme called Partitioned Modulation of 4 States in 3 Dimensions (4P-3D). Such scheme splits the binary message in 2-bit blocks and represents each block through a real vector of 3 components. The points of constellation match with vertices of a regular tetrahedron centered on origin. The modulation basis set is formed by 3 functions taken from an orthonormal wavelet family. Theoretic analyses and simulations results show that 4P-3D modulation has better performance against noise than binary pulse amplitude modulation (2-PAM) over additive white Gaussian noise channels (AWGN). Moreover, the modulated signal shaping from wavelets allows that synchronism errors over detection of samples be negligible on the bit error probability. An adverse aspect of 4P-3D is a reduction of spectral efficiency with respect to that 2-PAM.

**Keywords**— wavelet, orthonormal wavelet family, spectral efficiency, nominal coding gain.

## I. INTRODUCCIÓN

LAS *wavelets* son funciones reales, de corta duración, cuyo aspecto es similar al de una “breve oscilación” [1]. Poseen características especiales como ortogonalidad, soporte compacto, localización espectral, etc, que las hacen apropiadas para procesar señales no estacionarias. Su efectividad es reconocida en varios ámbitos del procesamiento de señales entre los que se destacan la compresión de información, el reconocimiento y clasificación de patrones, la limpieza de señales contaminadas, etc [1]- [4].

Dentro de las aplicaciones más conocidas en telecomunicaciones sobresalen la *modulación fractal* (envío de información redundante a diferentes velocidades) [5], [6], la *modulación multiportadora* (como una alternativa a los sistemas OFDM tradicionales) [7], [8], la *ecualización adaptativa* (para identificar las características de un canal inalámbrico) [9], [10], la *supresión de interferencias* (para eliminar distorsiones producidas por interferencias de banda estrecha) [11] y algunas estrategias de conformación de pulso en modulaciones simples como *M-PAM* [12], [13].

En este artículo se propone una técnica de modulación digital que representa la información mediante vectores tridimensionales y sintetiza la señal mediante wavelets. El objetivo es aprovechar las 3 dimensiones de la constelación para lograr una mayor separación entre los símbolos, sujeta a una restricción de energía promedio de la señal. Con ello se busca disminuir la probabilidad de error en términos de la relación *energía de bit a densidad espectral de potencia de ruido* ( $E_b/N_0$ ).

El artículo está organizado de la siguiente manera: En la sección II se mencionan los aspectos generales de las wavelets y algunos asuntos relacionados con el análisis multiresolución. En la sección III se realiza una descripción matemática del esquema de modulación propuesto. En la sección IV se calculan la eficiencia espectral y la probabilidad de error en forma teórica. En la sección V se muestran los resultados de las simulaciones y se comparan con la teoría. Finalmente, en la sección VI se exponen las conclusiones.

Generalidades de las wavelets  
*La Transformada Discreta Wavelet*

Una *familia wavelet* es el conjunto de todas las ver-

siones comprimidas, expandidas y desplazadas en potencias enteras de 2 de una *wavelet madre*. Si  $m$  representa el parámetro de escala y  $k$  el parámetro de traslación, la familia wavelet se define como:

$$\psi_k^m(t) = 2^{m/2} \psi(2^m t - k); m, k \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

donde  $\psi(t) = \psi_0^1(t)$  es la wavelet madre [1]-[4]. Una familia wavelet se denomina *ortonormal* cuando todos sus elementos satisfacen la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_k^m(t) \psi_n^l(t) dt = \delta[m - l] \delta[k - n], \quad (2)$$

donde  $\delta[\bullet]$  es la función delta Kronecker. Una familia wavelet ortonormal constituye una base para el espacio de señales de energía finita  $L^2(R)$  [1], de esa forma, una señal arbitraria  $x(t) \in L^2(R)$  se puede sintetizar en términos de la familia wavelet mediante:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^m \psi_k^m(t) dt; t \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

donde los términos  $X_k^m$  son los coeficientes wavelet de  $x(t)$ . Estos coeficientes se obtienen a partir de un producto interno entre la señal y cada uno de los elementos de la familia wavelet, esto es:

$$X_k^m = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_k^m(t) dt. \quad (4)$$

Los *coeficientes wavelet* caracterizan completamente a la señal de interés y viceversa, por tanto  $x(t)$  y  $X_k^m$  forman un par transformado wavelet. La ecuación (3) se conoce como *transformada inversa discreta wavelet* (IDWT) y la ecuación (4) como transformada discreta wavelet (DWT) [1]-[6]. En la parte superior de la figura 1 se muestra la *wavelet madre de Meyer* y en la parte inferior su espectro [2].

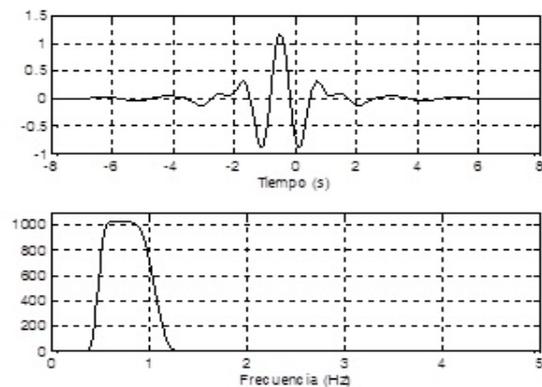


Figura 1. Wavelet madre de Meyer y su espectro.

*Análisis Multiresolución*

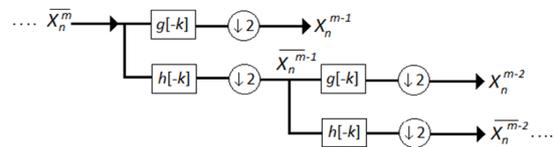
Al aplicarle transformada wavelet a una señal  $x(t)$  se obtienen dos tipos de información: La *información de detalle*, que corresponde a la proyección de la señal sobre los subespacios wavelet  $W_m$  y cuya base son las funciones wavelet de escala  $m$ ,  $\{2^{m/2} \psi(2^m t-k); k \in \mathbb{Z}\}$ ; y la *información de envolvente*, que corresponde a la proyección de la señal sobre los *subespacios scaling*  $V_m$  y cuya base son las funciones scaling de escala  $m$ , esto es,  $\{2^{m/2} \phi(2^m t-k); k \in \mathbb{Z}\}$ , donde  $\phi(t)$  es la scaling madre [1]-[5]. Las funciones  $\psi(t)$  y  $\phi(t)$  guardan una relación unívoca. La información de envolvente se representa mediante coeficientes scaling, los cuales se definen como:

$$\bar{x}_k^m = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) 2^{m/2} \phi(2^m t - k) dt. \quad (5)$$

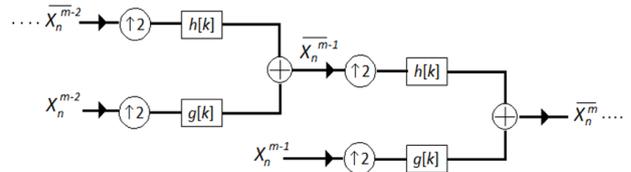
Los subespacios wavelet son mutuamente excluyentes y la unión de todos ellos es igual a  $L^2(\mathbb{R})$ . Por su parte, los subespacios scaling están sucesivamente autocontenidos y  $V_\infty$  converge a  $L^2(\mathbb{R})$  [1]-[5]. Algunas relaciones importantes que satisfacen  $W_m$  y  $V_m$  son las siguientes:

- $W_m \cap W_i = \emptyset, m \neq i, \quad (6a)$
- $\bigcup_{i=-\infty}^{\infty} W_i = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \quad (6b)$
- $V_m \cap W_m = \emptyset, \quad (6c)$
- $V_m \cup W_m = V_{m+1}, \quad (6d)$
- $\bigcup_{i=-\infty}^m W_i = V_{m+1}, \quad (6e)$

La función  $\psi(t)$  está asociada con un filtro digital pasa-altas de respuesta al impulso finita (FIR)  $g[n]$ . Así mismo,  $\phi(t)$  está asociada con un filtro pasa-bajas  $h[n]$  de la misma longitud. Estos filtros permiten descomponer y reconstruir señales a través de aproximaciones muestrales sucesivas [2]. Los algoritmos de Mallat utilizan dichos filtros para implementar computacionalmente las operaciones DWT e IDWT. En ese sentido, se define la transformada rápida wavelet (FWT) como el algoritmo para la descomposición (ó análisis) y la *transformada rápida inversa wavelet* (IFWT) como el algoritmo para la reconstrucción (ó síntesis). En las figuras 2 y 3 se muestra gráficamente el funcionamiento de los algoritmos de Mallat. Los símbolos  $\downarrow 2$  y  $\uparrow 2$  denotan respectivamente las operaciones *downsampling* de orden 2 y *upsampling* de orden 2 [1]-[4].



**Figura 2. Algoritmo FWT de Mallat.**



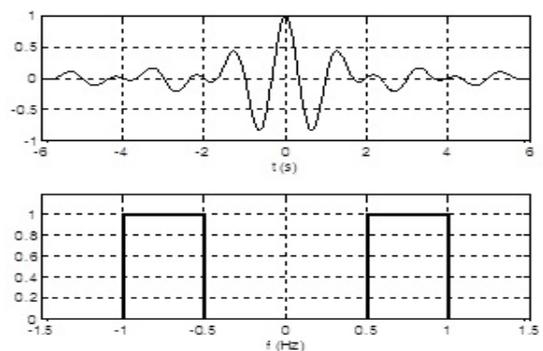
**Figura 3. Algoritmo IFWT de Mallat.**

*La Familia Shannon*

La familia Shannon posee gran importancia teórica debido a la forma espectral de sus elementos. La wavelet madre de Shannon tiene un espectro pasa-banda ideal que se extiende entre 0.5Hz y 1Hz. Así, un elemento de escala  $m$  ocupa una banda espectral comprendida entre  $2^{m-1}$ Hz y  $2^m$ Hz. Cabe anotar que esta familia no permite la implementación de los algoritmos de Mallat, por tanto no se la utiliza en aplicaciones prácticas. [5]. Sin embargo, es la que menor ancho de banda ocupa entre todas las wavelets conocidas. La wavelet madre de Shannon y su respectiva transformada de Fourier están dadas por:

$$\psi(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right), \quad (7a)$$

donde  $\text{sinc}(\cdot)$  es la función ideal de Nyquist<sup>1</sup> y  $\text{rect}(\cdot)$  es la función pulso rectangular unitario<sup>2</sup>. En la parte superior de la figura 4 se muestra la wavelet madre de Shannon y en la parte inferior su espectro pasa-banda ideal [5].



**Figura 4. Wavelet madre de Shannon y su espectro.**

<sup>1</sup>Función ideal de Nyquist:  $\text{SINC}(X) = \text{SEN}(\pi x) \setminus (\pi x)$   
<sup>2</sup>Función pulso rectangular unitario:  $\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2 \\ 0, & |x| \geq 1/2 \end{cases}$

### III. MODELO DEL SISTEMA

A continuación se describen las distintas etapas del esquema de modulación propuesto en este artículo.

#### Construcción de la Constelación (Mapeo)

El proceso de conversión de bits a símbolos es el siguiente:

Agrupar los bits del mensaje en pares de la forma:  $b_1^k, b_2^k$ , con  $b_i^k \in \{0, 1\}$ ;  $i=1, 2; k \in \mathbb{Z}$ .

El vector correspondiente a la  $k$ -ésima pareja de bits está dado por:

$$b_1^{(k)} b_2^{(k)} \rightarrow [\alpha(-1)^{b_1^{(k)}}, \alpha(-1)^{b_2^{(k)}}, \alpha(-1)^{b_1^{(k)} \oplus b_2^{(k)}}], \quad (8)$$

donde el operador  $\oplus$  denota suma módulo 2 y  $\alpha$  es un número real positivo arbitrario [14]. Así, la constelación resultante es la siguiente:

$$A = \{[\alpha, \alpha, \alpha], [\alpha, -\alpha, -\alpha], [-\alpha, \alpha, -\alpha], [-\alpha, -\alpha, \alpha]\}. \quad (9)$$

Dicha constelación consiste de 4 puntos en  $R^3$  que coinciden con los vértices de un tetraedro regular de lado  $2\sqrt{2} \alpha$ , centrado en el origen. En la figura 5 se muestra la constelación.

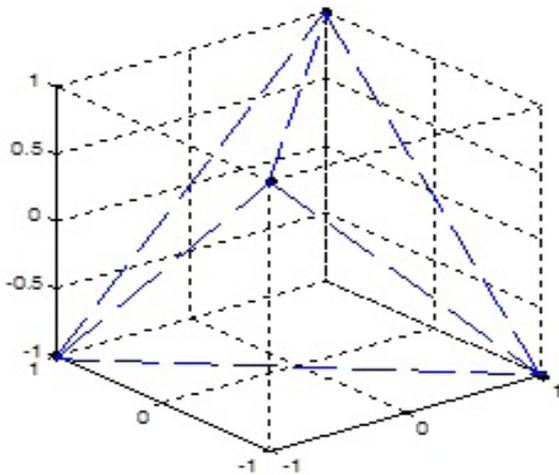


Figura 5. Constelación del esquema 4P-3D.

#### B. Modulación

Si la fuente transmite información a una tasa de  $R_b = 1/T_b$  bits por segundo, el modulador transmitirá símbolos a una tasa de  $R = 1/T = R_b/2$  vectores 3D por segundo, donde  $T = 2T_b$  es el periodo de símbolo y  $T_b$  es el periodo de bit. Supóngase que la tasa de símbolo es

una potencia entera de 2, esto es,  $R = 2^m, m \in \mathbb{Z}$ , entonces las funciones base serán los elementos en las escalas  $m$  y  $m+1$  de una familia wavelet ortonormal. Si se transmite un vector arbitrario  $X_k = [X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, X_3^{(k)}]$ , la señal transmitida correspondiente será:

$$X_k \rightarrow X_1^{(k)} \psi_k^m(t) + X_2^{(k)} \psi_{2k}^{m+1}(t) + X_3^{(k)} \psi_{2k+1}^{m+1}(t),$$

por tanto, si se transmite una secuencia aleatoria de vectores  $\{X_k \in \mathcal{A}; k \in \mathbb{Z}\}$ , la señal modulada será el proceso aleatorio:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_k [X_1^{(k)} \psi_k^m(t) + X_2^{(k)} \psi_{2k}^{m+1}(t) + X_3^{(k)} \psi_{2k+1}^{m+1}(t)] \\ &= \sum_k \mathbf{x}_k [\Phi_k(t)]^T, \end{aligned} \quad (10)$$

donde el superíndice  $[\cdot]^T$  es el operador de transposición matricial y

$$\Phi_k(t) = [\psi_k^m(t), \psi_{2k}^{m+1}(t), \psi_{2k+1}^{m+1}(t)].$$

La ecuación (10) se puede interpretar como una IDWT a 2 escalas, en la que los coeficientes wavelet de la señal modulada son las componentes rectangulares de los vectores transmitidos.

#### C. Demodulación

Cuando se transmite  $X(t)$  a través de un canal ideal AWGN, se tiene a la salida un proceso aleatorio  $Y(t)$  dado por:

$$Y(t) = X(t) + Z(t), \quad (11)$$

donde  $Z(t)$  es un proceso de ruido blanco Gaussiano de media cero y densidad espectral de potencia  $N_0/2$ . La tarea del demodulador consiste en correlacionar la salida del canal con cada una de las funciones base utilizadas para sintetizar a  $X(t)$  [14]-[21]. Así, en cada periodo de símbolo se obtiene un vector de muestras

$$Y_k = [Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}, Y_3^{(k)}], \text{ donde:}$$

$$Y_k = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t) \Phi_k(t) dt. \quad (12)$$

La ecuación (12) se puede entender como una DWT a 2 escalas, aplicada sobre la salida del canal. En este caso, los coeficientes wavelet son versiones ruidosas de los vectores transmitidos. Debido a la ortonormalidad del conjunto  $\Phi_k(t)$ , la secuencia de vectores reci-

bidos se puede expresar como: (ver demostración en el apéndice A)

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{X}_k + \mathbf{Z}_k, \quad (13)$$

donde la componente de ruido  $\mathbf{Z}_k = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Z}(t) \Phi_k(t) dt$ , es un vector de 3 variables aleatorias Gaussianas independientes e idénticamente distribuidas (iid), de media cero y varianza  $N_0/2$  (ver demostración en el apéndice B). La ecuación (13) corresponde a un modelo de canal AWGN en tiempo discreto [14], [16], [21].

#### D. Decisión

La tarea del decisor es generar una estimación  $\hat{\mathbf{X}}_k$  del símbolo transmitido a partir de la observación del vector recibido  $\mathbf{Y}_k$ , el cual constituye una estadística suficiente para la detección de  $\mathbf{X}_k$  [15]. Si los bits del mensaje son equiprobables e independientes, los símbolos también serán equiprobables e independientes, por tanto, la regla de decisión que minimizará la probabilidad de error será la regla de distancia mínima (MD) [14], [15], [16], [21]. Específicamente, el decisor deberá elegir aquel elemento de  $\mathcal{A}$  ubicado a la menor distancia euclidiana de  $\mathbf{Y}_k$ , esto es:

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \underset{\mathbf{a}_i \in \mathcal{A}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{Y}_k - \mathbf{a}_i\|. \quad (14)$$

### IV. DESEMPEÑO TEÓRICO DEL ESQUEMA DE MODULACIÓN

#### A. Eficiencia espectral nominal:

Si la familia wavelet utilizada es la de Shannon, el ancho de banda ocupado por la señal transmitida es [5]:

$$W = 2^{m+1} - 2^{m-1} = \frac{3R}{2}. \quad (15)$$

Por tanto, la eficiencia espectral nominal será la siguiente:

$$\rho = \frac{R_b}{W_0} = \frac{2R}{3R/2} = \frac{4}{3} \text{ bps/Hz}. \quad (16)$$

Claramente, este valor es inferior a los 2 bps/Hz teóricos de la modulación 2-PAM. La eficiencia espectral de 4P-3D también se puede obtener a través del postulado de Nyquist, el cual establece que sobre un ancho de banda fijo de  $W$  Hz se puede transmitir un máximo de  $2W$  números reales por segundo [22]-[26]. En ese sentido, la transmisión de un vector 3D es equivalente a la transmisión simultánea de 3 números reales, por tanto, el número máximo de vectores 3D por segundo

que se puede transmitir sobre dicho ancho de banda es  $2W/3$ . Por otra parte, debido al tamaño de la constelación, cada vector transporta 2 bits de información, con lo que la máxima velocidad de bit que se puede alcanzar es  $2 \cdot 2W/3 = 4W/3$  bps. De esa manera, al hacer la relación entre velocidad de bit y ancho de banda, se obtiene una eficiencia espectral de  $4/3$  bps/Hz.

Probabilidad teórica de error:

A partir de la estimación por fronteras de unión (UBE), la probabilidad teórica de error de símbolo,  $P_s$ , se puede aproximar mediante la siguiente expresión:

$$P_s = \Pr\{\hat{\mathbf{X}}_k \neq \mathbf{X}_k\} \approx \nu Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right), \quad (17)$$

donde  $Q(\cdot)$  es la función de distribución complementaria normal estándar<sup>3</sup>,  $d$  es la distancia mínima de la constelación,  $\sigma$  es la varianza de ruido por dimensión y  $\nu$  es el número promedio de vecinos más cercanos a cada símbolo de la constelación, es decir, el promedio de símbolos ubicados a una distancia  $d$  de cualquier otro [14]-[16], [21]. La energía promedio de bit  $E_b$ , se define como:

$$E_b = \frac{E\{\|\mathbf{X}_k\|^2\}}{\log_2 M} = \frac{1}{\log_2 M} \sum_{\mathbf{a}_i \in \mathcal{A}} \|\mathbf{a}_i\|^2 \Pr\{\mathbf{X}_k = \mathbf{a}_i\}, \quad (18)$$

donde  $E\{\cdot\}$  denota valor esperado,  $\|\cdot\|$  denota norma Euclidiana y  $M$  es el tamaño de la constelación [14], [17], [21]. Para el caso de la modulación 4P-3D con símbolos equiprobables, se tienen los siguientes valores para los parámetros:

$$M = 4, \quad (19a)$$

$$E_b = 3\alpha^2/2, \quad (19b)$$

$$d = 2\sqrt{2} \alpha, \quad (19c)$$

$$\sigma^2 = N_0/2, \quad (19d)$$

$$\nu = 3. \quad (19e)$$

<sup>3</sup> La función  $Q$  se define como:

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Tomando en cuenta todo lo anterior se llega a la siguiente expresión aproximada para la probabilidad de error de símbolo:

$$P_s \approx 3 Q \left( \sqrt{\frac{8}{3}} E_b/N_0 \right). \quad (20)$$

La probabilidad de error de bit  $P_b$  se puede obtener a partir de  $P_s$  de la siguiente manera:

$$P_b = \frac{n_{err}}{\log_2 M} P_s, \quad (21)$$

donde  $n_{err}$  es el número promedio de bits detectados erróneamente por cada error de símbolo [16]. Para la modulación 4P-3D con el mapeo de (8) se tiene que  $n_{err} = 4/3$ , por tanto:

$$P_b \approx 2 Q \left( \sqrt{\frac{8}{3}} E_b/N_0 \right). \quad (22)$$

Por su parte, la probabilidad teórica de error de bit de 2-PAM está dada por:

$$P_b = Q \left( \sqrt{2 E_b/N_0} \right). \quad (23)$$

Dado que la función  $Q$  es estrictamente decreciente [14]-[16], la  $P_b$  de 4P-3D tiende a ser menor que la  $P_b$  de 2-PAM (para un mismo valor de  $E_b/N_0$ ), pues el argumento de la función  $Q$  es mayor en la ecuación (22). Con esto se puede concluir que 4P-3D tiene un mejor desempeño frente al ruido que 2-PAM.

### C. Ganancia de codificación nominal

La ganancia de codificación nominal de un esquema de modulación es una cantidad adimensional que se define como [14], [16]:

$$g_c = \frac{d^2}{4E_b}. \quad (24)$$

Para 2-PAM,  $g_c=1$  (0dB). Para 4P-3D,  $g_c=4/3$  (1.25dB). Por tanto, asintóticamente hablando, para una misma probabilidad de error de bit, la modulación 4P-3D proporciona un ahorro de 1.25dB en  $E_b/N_0$  respecto a 2-PAM.

## V. Simulación y resultados

### A. Diseño del Sistema

El diseño computacional del modulador está basado en el algoritmo IFWT de Mallat [5], [13]. Dicho algoritmo permite sintetizar la señal modulada en tiempo

discreto. Si la frecuencia de muestreo es suficientemente alta, las muestras serán una fiel representación de la señal modulada. Es más, si esa frecuencia de muestreo es mucho más grande que la estrictamente necesaria, la probabilidad de que las muestras tomadas en el receptor sean muy aproximadas a las de la señal modulada (ignorando el ruido) será arbitrariamente alta. En ese sentido, un factor de sobremuestreo suficientemente grande permite reducir el efecto de los errores de sincronización a un nivel despreciable. Para ilustrar el proceso de conformación de la señal modulada se tiene el siguiente ejemplo: Supóngase que se desea transmitir una secuencia de 3 vectores (6 bits), a saber:

$$\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}, \text{ con } \mathbf{X}_i = [X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, X_3^{(i)}], \text{ para } i = 0, 1, 2.$$

En este caso, la señal modulada se conformará a partir de 9 coeficientes wavelet no nulos, los cuales se distribuyen entre las escalas  $m$  y  $m+1$  de la siguiente forma:

|                  |             |             |             |             |             |             |   |   |   |   |
|------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|---|---|---|---|
| Escala $m$ :     | $X_1^{(0)}$ | $X_1^{(1)}$ | $X_1^{(2)}$ |             |             |             |   |   |   |   |
| Escala $m + 1$ : | $X_2^{(0)}$ | $X_3^{(0)}$ | $X_2^{(1)}$ | $X_3^{(1)}$ | $X_2^{(2)}$ | $X_3^{(2)}$ |   |   |   |   |
| Escala $m + 2$ : | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Escala $m + 3$ : | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           | 0           | 0 | 0 | 0 | 0 |

En la escala  $m$  se introducen las primeras componentes de cada vector, en la escala  $m+1$  se hace lo propio con las segundas y terceras componentes. En las escalas  $m+2$  y  $m+3$  se hace un relleno con ceros (nótese que el número de coeficientes se duplica al pasar de una escala a otra). Este relleno tiene como finalidad introducir un factor de sobremuestreo arbitrario en la señal modulada. Mientras mayor sea el número de escalas rellenas con ceros, más fina será la representación de la señal modulada a partir de sus muestras. Sin embargo, ello aumentará la complejidad computacional del modulador. En el ejemplo anterior, el periodo de muestreo de la señal modulada es la octava parte del periodo de símbolo, esto es,  $T_s = T / 8$ , por tanto, el factor de sobremuestreo es 8. En la práctica, ese factor de sobremuestreo puede ser suficiente para representar la señal modulada (dependiendo del tipo de *wavelet*), pero insuficiente para descartar los errores de sincronización. En la figuras 6 y 7 se muestran las implementaciones computacionales del transmisor y receptor respectivamente. Los símbolos  $X_\delta(t)$  y  $Y_\delta(t)$  hacen referencia a las versiones muestrales de  $X(t)$  y  $Y(t)$ .

— Un esquema de modulación de 4 estados en 3 dimensiones basado en wavelets (4p-3d). Ramírez y Romo

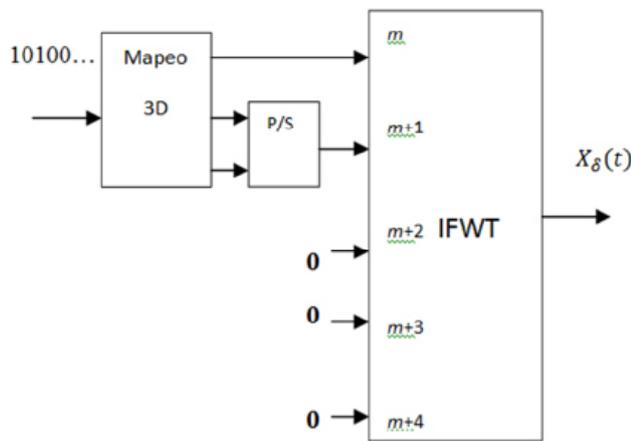


Figura 6. Implementación computacional del transmisor 4P-3D.

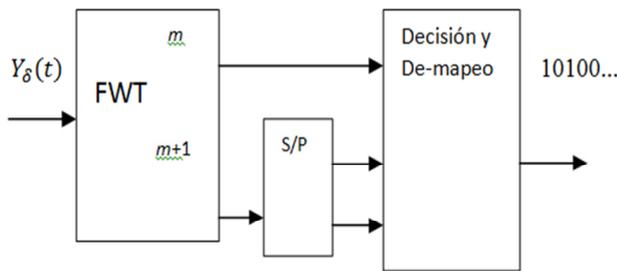


Figura 7. Implementación computacional del receptor 4P-3D.

### B. Resultados en Eficiencia Espectral

En la parte superior de la figura 8 se muestra la señal modulada 4P-3D y en la parte inferior su respectivo espectro. La wavelet utilizada en ese caso es la Daubechies 45 (db45).

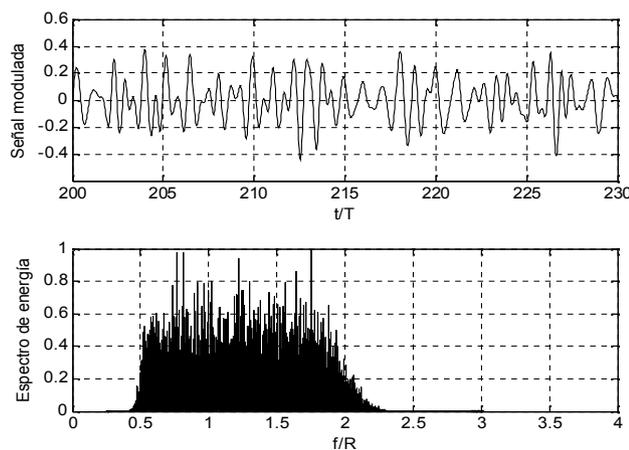


Figura 8. Señal modulada 4P-3D y su espectro.

En la tabla 1 se muestran las eficiencias espectrales obtenidas con diferentes tipos de wavelet. El criterio para calcular el ancho de banda ocupado es el *percentil 99*, es decir, la longitud del intervalo de frecuencia donde se concentra un porcentaje de energía no menor al 99% del total [13]. Claramente, la wavelet db45 tiene el mejor desempeño en cuanto a eficiencia espectral (sólo 11% menos del valor teórico).

Tabla 1. Eficiencias espectrales obtenidas por simulación.

| Tipo de wavelet       | Eficiencia espectral [bps/Hz] |
|-----------------------|-------------------------------|
| Haar (db1)            | 0.1666                        |
| Daubechies 8 (db8)    | 0.9523                        |
| Coiflet 5 (coif5)     | 1                             |
| Symlet 30 (sym30)     | 1.1627                        |
| Meyer discreta (dmey) | 1.1764                        |
| Daubechies 45 (db45)  | 1.1976                        |

### C. Resultados en Probabilidad de Error

En la figura 9 se muestra la curva de desempeño de la probabilidad de error de bit ( $P_b$ ) versus  $E_b/N_0$  correspondiente esquema 4P-3D (obtenida por simulación). Junto a ella se encuentran las curvas de las ecuaciones (22) y (23). Para probabilidades de error inferiores a  $10^{-4}$ , se observa que el desempeño de 4P-3D supera en más de 1dB a 2-PAM. También se evidencia la gran similitud entre los resultados teóricos y los resultados de la simulación, lo que permite considerar a la UBE como un mecanismo confiable para la predicción del desempeño de un esquema de modulación digital.

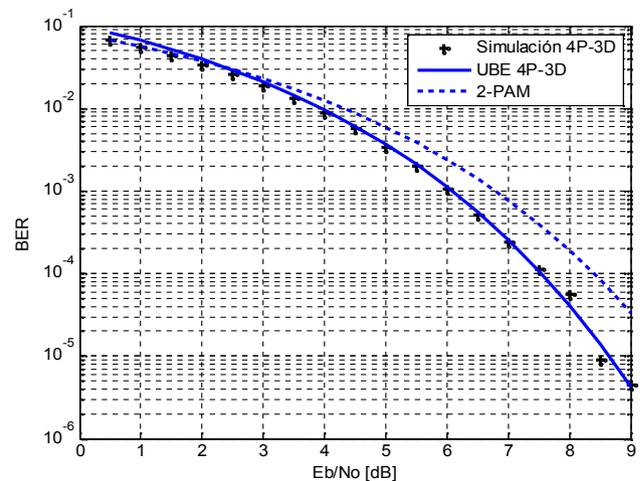


Figura 9. Probabilidad de error de 4P-3D comparada con la de 2-PAM.

D. Impacto de los Errores de Sincronización

En la figuras 10, 11 y 12 se muestran las curvas de desempeño de la probabilidad de error cuando se cometen errores de sincronización máximos. En la figura 10 se muestra la curva resultante para un factor de sobremuestreo de 32, esto es, un error de sincronización máximo de  $T/32$ . Se observa que la probabilidad de error aumenta notablemente respecto al valor teórico, superando incluso a la curva de 2-PAM, por tanto, ese factor de sobremuestreo se considera insuficiente para descartar los errores de sincronización.

En la figura 11 se ilustra el caso en el que el factor de sobremuestreo es 64, lo que conduce a un error de sincronización máximo de  $T/64$ . Se observa que probabilidad de error es un poco mayor al valor teórico pero inferior a la probabilidad de error de 2-PAM. En la figura 12 se muestra la misma curva cuando el factor de sobremuestreo es 128, es decir, cuando ocurre un error de sincronización máximo de  $T/128$ . En esta ocasión, el efecto de tal error es prácticamente despreciable, pues los resultados de la simulación coinciden con los teóricos.

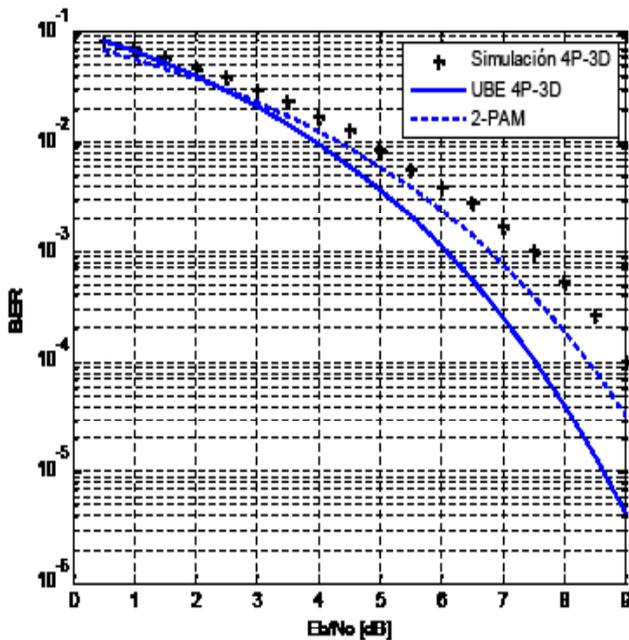


Figura 10. Impacto de un error de sincronización de  $T/32$ .

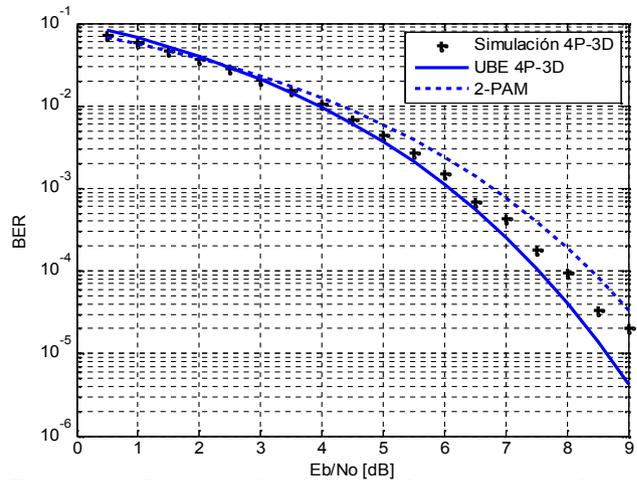


Figura 11. Impacto de un error de sincronización de  $T/64$ .

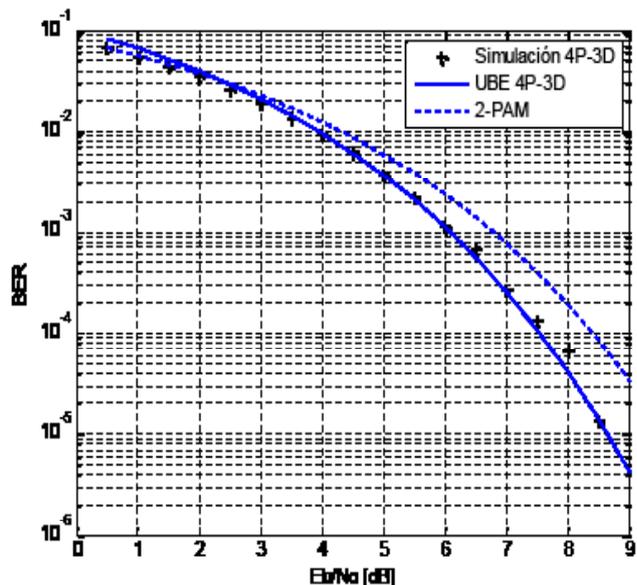


Figura 12. Impacto de un error de sincronización de  $T/128$ .

VI. Conclusiones

El esquema de modulación propuesto en este artículo supera claramente a 2-PAM en desempeño frente al ruido, sin embargo esa mejora se compensa con una disminución notable de la eficiencia espectral. No obstante, la técnica de modulación propuesta posee otras ventajas importantes respecto a los esquemas binarios tradicionales. Una de esas ventajas es la posibilidad de prescindir de un circuito recuperador de sincronismo. Como es bien sabido, los esquemas tradicionales como  $M$ -PAM y  $M$ -QAM que emplean señalización con pulsos Nyquist requieren un circuito para determinar el instante óptimo de muestreo, lo que representa mayor complejidad en el receptor. El

esquema 4P-3D, por su parte, no requiere tal circuito siempre que el factor de sobremuestreo sea 128 o superior. Otra gran ventaja de la técnica de modulación propuesta es la forma de su espectro, el cual es de carácter pasa-banda. Dicho rasgo permite realizar una traslación espectral en banda lateral única (SSB), que conserva el ancho de banda ocupado en banda base, a diferencia de otros esquemas como BPSK y ASK, los cuales requieren traslación en doble banda lateral (DSB), aumentando así el consumo de ancho de banda.

### Apéndices

Demostración de la ecuación (13)

Dado que  $\Phi_k(t)$  es una base ortonormal de funciones y que  $Y(t) = X(t) + Z(t)$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_k &= \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \Phi_k(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} Z(t) \Phi_k(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_n \mathbf{X}_n [\Phi_n(t)]^T \right] \Phi_k(t) dt + \mathbf{Z}_k \\ &= \sum_n \mathbf{X}_n \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_n(t)]^T \Phi_k(t) dt + \mathbf{Z}_k \\ &= \sum_n \mathbf{X}_n \mathbf{I}_3 \delta[k - n] + \mathbf{Z}_k \\ &= \sum_n \mathbf{X}_n \delta[k - n] + \mathbf{Z}_k \\ &= \mathbf{X}_k + \mathbf{Z}_k. \end{aligned} \tag{A1}$$

El símbolo  $\mathbf{I}_3$  es la matriz identidad de tamaño  $3 \times 3$ .

Distribución de probabilidad del vector de ruido  $\mathbf{Z}_k$   
Partiendo del hecho de que  $\mathbf{Z}_k = \int_{-\infty}^{\infty} Z(t) \Phi_k(t) dt$  es una transformación lineal de un proceso AWGN, se dice que  $\mathbf{Z}_k$  es un vector aleatorio conjuntamente Gaussiano. A continuación se demostrará que la media de dicho vector es  $\mathbf{0} = [0, 0, 0]$  y que la matriz de covarianza es proporcional a la matriz identidad de tamaño  $3 \times 3$ , lo que significa que sus tres componentes son variables aleatorias Gaussianas iid. Téngase en cuenta que  $Z(t)$  es un proceso de ruido que satisface las siguientes relaciones:

$$E[Z(t)] = 0, E[Z(t)Z(\omega)] = \frac{N_0}{2} \delta(t - \omega).$$

De esa forma, el vector de medias y la matriz general de covarianza estarán dadas por:

- *Media:*

$$\begin{aligned} E[\mathbf{Z}_k] &= E \left[ \int_{-\infty}^{\infty} Z(t) \Phi_k(t) dt \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[Z(t)] \Phi_k(t) dt \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{A2}$$

- Matriz General de Covarianza:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{Z}_k^T \mathbf{Z}_n] &= E \left[ \left( \int_{-\infty}^{\infty} Z(t) \Phi_k(t) dt \right)^T \left( \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) \Phi_n(\omega) d\omega \right) \right] \\ &= E \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Z(t) Z(\omega) [\Phi_k(t)]^T \Phi_n(\omega) d\omega dt \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} E[Z(t)Z(\omega)] [\Phi_k(t)]^T \Phi_n(\omega) d\omega \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_k(t)]^T \left[ \int_{-\infty}^{\infty} E[Z(t)Z(\omega)] \Phi_n(\omega) d\omega \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_k(t)]^T \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \delta(t - \omega) \Phi_n(\omega) d\omega \right] dt \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_k(t)]^T \Phi_n(t) dt \\ &= \frac{N_0}{2} \mathbf{I}_3 \delta[k - n] \end{aligned} \tag{A3}$$

Así, cuando  $k=n$ , se tiene la matriz de covarianza (ó autocovarianza),  $\mathbf{C}_{k,k} = N_0/2 \mathbf{I}_3$ .

De la misma forma, cuando  $k \neq n$  se tiene la matriz de covarianza cruzada entre 2 instantes de tiempo diferentes,  $\mathbf{C}_{k,n} = \mathbf{0}$ .

## BIBLIOGRAFÍA

1. I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia, PA, SIAM, 1992.
2. S. Mallat, A Wavelet Tour of Signal Processing, Academic Press, 1998.
3. I. Daubechies, "The wavelet transform, time frequency localization and signal analysis", IEEE Trans. IT., vol. 36, no. 5, pp. 961-1005, 1990.
4. I. Daubechies, "Orthonormal bases of compactly supported wavelets", Commun. Pure Appl. Math., vol. 4, pp. 909-996, 1988.
5. G. W. Wornell and A.V. Oppenheim, "Wavelet-based representations for a class of self similar signals with application to fractal modulation", IEEE Trans. IT., vol. 38, no. 2, pp. 785-800, 1992.
6. H. S. Ptasiniski and R. D. Fellman, "Implementation and simulation of a fractal modulation communication system", Proceedings of the IEEE SUPERCOMM/ICC, vol. 3, pp. 1551-1555, 1994.
7. A. R. Lindsey, "Wavelet packet modulation for orthogonally multiplexed communications", IEEE Trans. SP., vol. 45, no. 5, pp. 1336-1339, 1997.
8. A. R. Lindsey and M. J. Medley, "Wavelet transform and filter banks in digital communications" SPIE Proc. Wavelet Appl. III. #2762-48, 1996.
9. A. Bell and M. Manglani, "Wavelet modulation in Rayleigh fading channels: improved performance and channel identification", Proceedings of ICASSP, pp. 2813-2816, 2002.
10. Y. Qi, "Wireless geolocation in a non-line-of-sight environment", PhD thesis Princeton University, 2003.
11. A. Jamin and P. Mahonen, "Wavelet packet modulation for wireless communication", Wireless Communications and Mobile Computing Journal, vol. 5, issue 2, 2005.
12. M. Liu, "Wavelets and Nyquist filter design", PhD thesis, Queens University, Kingston-Canada, 1999.
13. J. N. Livingston and C. Tung, "Bandwidth efficient PAM signaling using wavelets", IEEE Trans. Comm., vol. 44, no. 12, pp. 1629-1631, 1996.
14. G. D. Forney, Principles of Digital Communications II, M.I.T. Open Course Ware, 2005.
15. R.G. Gallager, Principles of Digital Communications I, M.I.T. Open Course Ware, 2006.
16. N. Benvenuto and G. Cherubini, Algorithms for Communication Systems and their Applications. Wiley, 2002.
17. T. Noguchi, Y. Daido and J. Nosseck, "Modulation techniques for microwave digital radio", IEEE Communications Magazine, vol. 24, no. 10, pp. 21-30, 1986.
18. S. Haykin, Communication Systems, Wiley, New York, 2002.
19. J. G. Proakis, Digital Communications, 4th ed. McGraw-Hill, 2000.
20. M. Pursley, Introduction to Digital Communications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2005.
21. G. D. Forney and G. Ungerboeck, "Modulation and coding for linear Gaussian channels", IEEE Trans. IT, vol. 44, pp. 2384-2415, 1998.
22. R. V. L. Hartley, "Transmission of information", Bell System Technical Journal, p. 535, 1928.
23. C. E. Shannon, "A mathematical theory of communications", Bell System Technical Journal, 27, pp. 379-423, 623-656, 1948.
24. H. Nyquist, "Certain topics in telegraph transmission theory", Trans. AIEE 47, pp. 627-644, 1928.
25. R. G. Gallager, Information Theory and Reliable Communication, Wiley, 1968.
26. T. M. Cover and J.A. Thomas, Elements of Information Theory, 2nd ed. Wiley, 2006.